

文章编号: 1000-7598-(2005) 01-0163-06

极限分析有限元法讲座—— I 岩土工程极限分析有限元法

郑颖人, 赵尚毅, 孔位学, 邓楚键

(后勤工程学院 土木工程系, 重庆 400041)

摘 要: 经典岩土工程极限分析方法一般采用解析方法, 有些还要对滑动面作假设, 且不适用于非均质材料, 尤其是强度不均的岩石工程, 从而使极限分析法的应用受到限制。随着计算技术的发展, 极限分析有限元法应运而生, 它通过强度降低或者荷载增加直接算得岩土工程的安全系数和滑动面, 十分贴近工程设计。为此, 探讨了极限分析有限元法及其在边坡、地基、隧道稳定性计算中的应用, 算例表明了此法的可行性, 拓宽了该方法的应用范围。随着计算机技术与计算力学的发展, 岩土工程极限分析有限元法正在成为一门新的学问, 而且有着良好的发展前景。

关 键 词: 极限分析有限元法; 边坡稳定分析; 地基极限承载力; 隧道稳定性

中图分类号: O 241

文献标识码: A

Geotechnical engineering limit analysis using finite element method

ZHENG Ying-ren, ZHAO Shang-yi, KONG Wei-xue, DENG Chu-jian

(Department of civil Engineering, Logistical Engineering University, ChongQing, 400041, China)

Abstract: The analytical method is adopted in classical geotechnical engineering limit analysis method. It cannot involve the stress-strain behavior of soil and sometimes assumptions needs to be made in advance about the shade or location of the failure surface. It is not suitable for heterogeneous materials, especially the rock engineering. So its application still remains limited. With the development of computer and computing technology, the limit analysis finite element method was put forward. With the strength reduction or load increase, the stability safety factor and failure surface can be obtained directly at limit state. It is very practical for geotechnical engineering design. This paper studies the limit analysis finite element method and its application in the slope、tunnel、ultimate bearing capacity of foundations. Through a series of case studies, the applicability of the proposed method is clearly exhibited.

Keywords: limit analysis finite element method, slope stability analysis, ultimate bearing capacity of foundations, tunnel stability.

1 经典岩土极限分析法的发展及问题

极限分析法的力学基础是土体处于理想弹塑性或者刚塑性状态, 并处于极限平衡状态, 即土体滑动面上每点的剪应力与土体的抗剪强度相等或者滑动面上的作用力与抗剪力相等。土体处于极限平衡状态有两个力学特征: 一是土体已处于濒临破坏失稳状态, 因而它可作为岩土工程破坏失稳的判据; 二是岩土材料强度得到充分发挥, 达到了最经济的效果, 因而土体极限平衡状态常被作为岩土工程设计的依据, 它是安全可靠、经济合理的最佳结合状

态。

将地基或者土坡引入极限状态有两种方法: 一是增量加载, 例如求地基的极限承载力; 二是强度折减, 例如求土坡的稳定安全系数。

经典极限分析方法一般采用解析方法, 适用于均质材料。极限状态的设计计算只引用屈服条件或破坏条件, 不必引用复杂的岩土本构关系, 从而使岩土工程的设计计算大为简化。极限状态计算应满足如下条件:

- (1) 静力平衡条件和力的边界条件;
- (2) 应变、位移协调条件和位移边界条件;

收稿日期: 2004-08-02

修改稿收到日期: 2004-10-25

作者简介: 郑颖人, 男, 1933 年生, 中国工程院院士, 教授, 博士生导师, 从事岩土本构关系理论与数值分析及岩土工程稳定性研究。
E-mail: zhaoshangyi@163.net

(3) 屈服条件或者破坏条件。

当前采用的经典极限分析法有如下4类:即极限平衡法; 滑移线场法; 上、下限分析法与变分法。每种方法都有各自的优缺点, 有些还要作一定的假定, 如极限平衡法、上限法、滑移线场法等都要对临界滑动面作假定, 且不适用于非均质材料, 尤其是强度不均的岩石工程, 从而使极限分析法的应用受到限制, 这正是经典岩土工程极限分析的不足。

2 极限分析有限元法的提出

如上所述, 经典极限分析法存在应用范围不宽, 只是适用于均质材料等不足, 而一般的有限元法又无法计算岩土工程的极限荷载和稳定安全系数, 限制了它的工程应用价值。为了克服上述两者的缺点, 极限分析有限元法应运而生, 形成一门新的学问, 它使极限分析可以采用有限元数值分析方法运算, 并有现成程序可用 (比如美国的ANSYS程序), 从而扩大了极限分析法的应用范围。

上世纪 70 年代, 英国科学家 Zienkiewicz 就已经提出采用增加外荷载或降低岩土强度的方法来计算岩土工程的安全系数, 实质上这就是极限分析有限元法, 但可惜长期以来没有得到岩土工程界的广泛认可, 其原因大致有如下三个方面:

(1) 计算力学还在起步阶段, 缺少严密可靠的大型商用程序, 有限元前后处理技术水平较低, 阻碍了极限分析有限元法的应用。当前, 这一情况有了根本的改变。

(2) 计算机计算不收敛作为土体破坏的判据没有得到广泛认可, 目前土体破坏的标准有如下几种:

(a) 滑移面塑性区贯通, 表明滑移面上每点都达到极限平衡状态^[1];

(b) 有限元数值计算不收敛, 认为除人为操作出错外, 有限元静力平衡方程组无解, 有限元计算不收敛表征土体已经破坏^[2,3];

(c) 土体破坏标志应当是滑动土体无限移动, 此时土体滑移面上应变和位移发生突变且无限发展。

经笔者的研究 (见后文), 上述土体破坏三种标准有如下关系: 土体滑动面塑性区贯通是土体破坏的必要条件, 但不是充分条件。土体破坏的标志应是部分土体出现无限移动, 此时滑移面上的应变或者位移出现突变, 因此, 这种突变可作为破坏的标志。此外有限元计算会同时出现计算不收敛。可见, 上述(b)(c)两种判断依据是一致的。从计算结果来看判据 (a) 与判据 (b)、(c) 的差异也不大, 因而采用有限元数值计算是否收敛作为土体破坏的依据是

合适的。

(3) 近年来, 采用强度折减有限元法计算土坡的稳定性受到国内外学者的关注, 因为一些算例表明, 采用强度折减有限元法与采用传统的极限平衡法计算出来的稳定安全系数十分接近, 然而还缺少大量算例的验证。为此, 作者作了大量的算例^[4], 不但证明了上述两种算法的结果是相当一致的, 而且与采用的强度准则有关。表 1 中列出了各种准则采用非关联流动法则时得到的计算结果并与严格条分法(Spencer) 法进行比较。传统极限平衡条分法安全系数计算采用的软件为加拿大的边坡稳定分析程序 SLOPE/W。表中 DP1 为外接圆 DP 准则; DP2 为摩尔-库仑等面积圆 DP 准则; DP3 为平面应变条件下的摩尔-库仑匹配 DP 准则; S 指 Spencer 法。

表 1 用不同方法求得的稳定安全系数
Table 1 Safety factor from different methods

方法	坡角/ (°)				
	30	35	40	45	50
FEM(DP1)	1.72	1.58	1.44	1.34	1.26
FEM(DP2)	1.47	1.34	1.21	1.12	1.05
FEM(DP3)	1.39	1.27	1.16	1.06	1.0
Spencer 法	1.39	1.26	1.15	1.06	0.99
(DP1-S)/S	0.24	0.26	0.25	0.26	0.27
(DP2-S)/S	0.06	0.06	0.05	0.05	0.06
(DP3-S)/S	0.00	0.01	0.01	0.00	0.01

综上所述, 阻碍极限分析有限元法发展的各种因素正在逐步消减, 并逐渐得到公认, 从而正在成为极限分析法的一门主要分支。

3 极限分析有限元法的应用

3.1 在滑(边)坡工程中的应用^[4-10]

3.1.1 在土坡中的应用

正如前述, 强度折减有限元法在土坡工程中的应用, 已经得到岩土工程界的公认, 并用于诸多边坡工程中。表1已经说明只有当正确运用破坏准则时, 才能得到合理的计算结果。

图 1~图 3 为采用有限元强度折减法得到的滑动面形状和位置。由图可见, 三种方法得到的滑动面位置和形状十分接近, 表明有限元强度折减法在具有寻求潜在滑面位置方面的优越性。



图 1 用塑性应变剪切带表示的滑动面
Fig.1 The failure surface using continuous contours of equivalent plastic strain

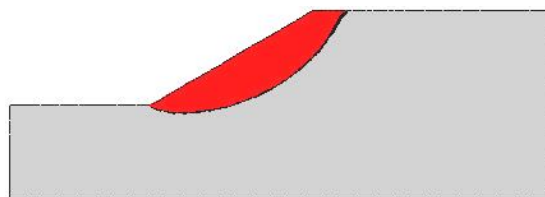


图 2 用水平位移突变表示的滑动面位置和形状

Fig. 2 The failure surface using continuous contours of displacement

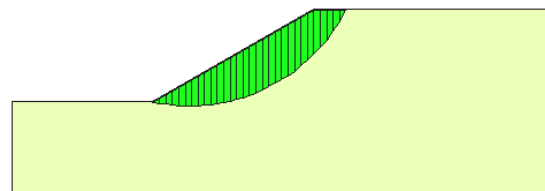


图 3 用 Slope/w 中的 Spencer 法得到的滑动面形状

Fig. 3 The failure surface from Spencer method in Slope/w

3.1.2 在岩石边坡中的应用^[11]

文献[5]采用有限元强度折减法对由结构面（贯通和非贯通）控制的岩质边坡破坏机制进行数值模拟分析，采用低强度实体单元来模拟岩体软弱结构面，按照连续介质处理；采用无厚度的接触单元模拟硬性结构面的接触行为，建立岩质边坡非线性有限元模型，通过强度折减使边坡达到极限破坏状态，得到了具有贯通和非贯通结构面岩质边坡的破坏形式及相应的安全系数，为岩质边坡稳定分析开辟了新的途径。图 4 和图 5 为由两组结构面（贯通率 100%）控制的岩质边坡达到极限状态后的破坏形式。从图 4 中可以明显看到滑动面，求得的安全系数见表 2，其中极限平衡方法计算结果是根据最先贯通的那一条滑动面求得的。从表 2 可以看出，由强度折减有限元法得到的安全系数与按极限平衡法获得的安全系数也十分接近。

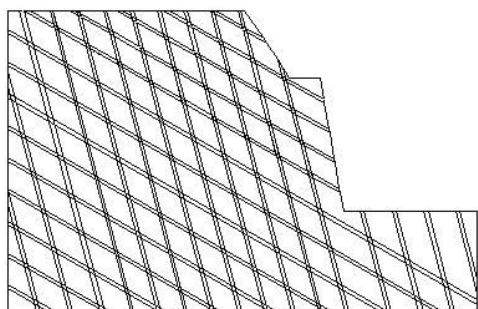


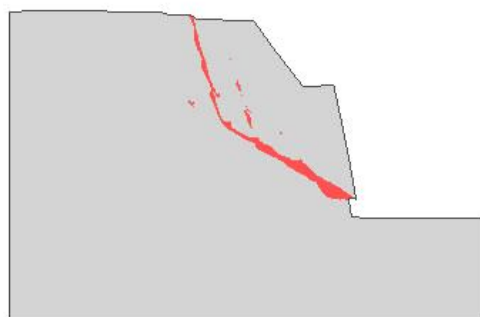
图 4 几何模型

Fig. 4 Geometry Model

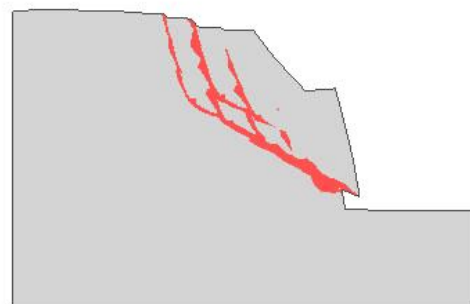
表 2 安全系数计算结果

Table 2 Safety factor from different methods

计算方法	安全系数
有限元法（外接圆 DP 准则）	1.68
有限元法（摩尔-库仑等面积圆 DP 准则）	1.39
极限平衡方法(Spencer)	1.36



(a)首先贯通的滑动面



(b)滑动面继续发展

图 5 岩质边坡达到极限状态后的破坏形式

Fig. 5 Failure Progress of rock slope

3.1.3 在岩土介质与支挡结构共同作用中的应用^[11]

传统的极限平衡方法可以求出岩土介质作用在支挡结构上的推力，但不知道推力的分布。由于对推力分布作不同的假设求得的支挡结构内力有很大差异，从而降低了计算的精度。强度折减有限元法的应用，有助于考虑岩土介质与支挡结构的共同作用，从而获得支挡结构上真实的推力分布状况，它们是在土体处于极限平衡状态下获得的。图6为采用有限元强度折减法得到的崇溪河至遵义高速公路高工天滑坡推力分布，土压力呈弓形分布。

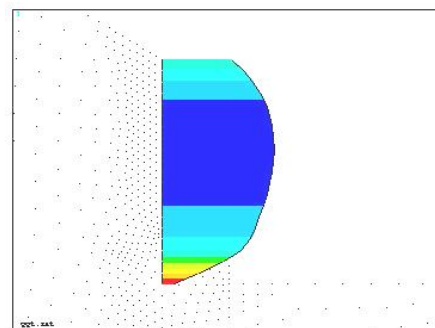


图 6 用有限元法得到的滑坡推力分布

Fig. 6 Landslide thrust pressure distribution from FEM.

图 7、图 8 为该滑坡采用预应力锚索抗滑桩加固后桩的弯矩和剪力分布。

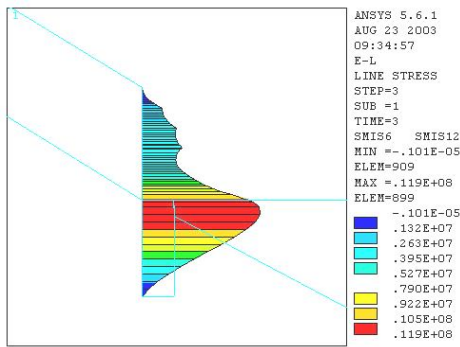


图 7 预应力锚索桩的弯矩分布
Fig. 7 Bending moment distribution in pre-stressed cable-pile

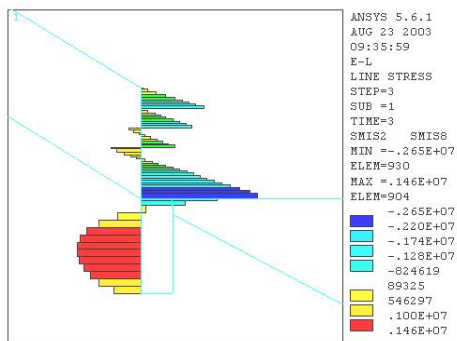


图 8 预应力锚索桩的剪力分布
Fig. 8. Shear force distribution in the pile

3.2 在地基中的应用

经典的极限分析法可以用来求地基的极限荷载，那么极限分析有限元法当然也可以用来求地基极限荷载，作者对此作了尝试。

光滑刚性条形地基的极限承载力问题的基本理论基础源于 Prandtl 解，对一个承受均匀垂直荷载的半无限、无重量地基，其极限承载力可以通过极限分析求得其精确解为：

$$q_u = c \cot \varphi \left[\exp(\pi \tan \varphi) \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - 1 \right]$$

在 $\varphi = 0$ 的情况下 $q_u = (\pi + 2)c$

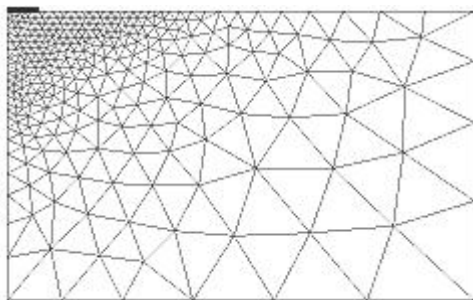


图 9 有限元网格划分
Fig. 9 Finite element mesh

在地基极限承载力有限元计算模型中（图 9）可以采用逐步增大荷载的方式来使系统达到极限状态，此时静力有限元计算不收敛。

算例：取 $c = 10$ ， $\varphi = 0^\circ \sim 30^\circ$ ，采用平面应变摩尔-库仑匹配 DP 准则（关联流动法则）。

$$F = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} = k$$

$$\alpha = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3}\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}}, \quad k = \frac{3c \cos \varphi}{\sqrt{3}\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}}$$

不同参数条件下的计算结果见表 3。

表 3 极限承载力计算结果 (kPa)

Table 3 Calculation results of limit bearing capacity

$\varphi/(^\circ)$	Prandtl 理论解	有限元法	相对误差 (%)
0	51.42	52.19	1.50
5	64.89	65.96	1.66
10	83.45	84.98	1.83
15	109.77	111.90	1.94
20	148.35	151.75	2.29
25	207.21	212.08	2.35
30	301.40	310.00	2.85

从表 3 的计算结果看出，采用极限分析有限元法得到的极限承载力与 Prandtl 解非常接近。计算也可以采用非关联流动法则的平面应变摩尔-库仑匹配 DP 准则，两者计算结果十分接近。

图 10 为极限状态后的基础附近局部的位移矢量图（ $\varphi = 0^\circ$ ），图 11 为极限状态后的基础附近局部的等效塑性应变等值云图（ $\varphi = 0^\circ$ ），图 12 为相应情况下的 Prandtl 解的破坏机构图。由上述图可见，极限分析有限元法求解的破坏形式与 Prandtl 解的破坏形式非常一致。

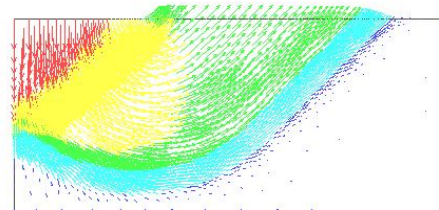


图 10 位移矢量图
Fig. 10 Diagram of displacement vector

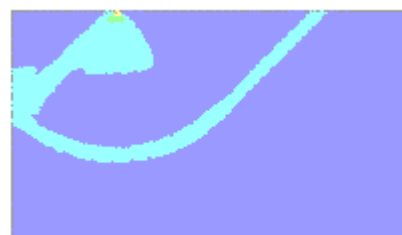


图 11 极限状态时的破坏滑动面
Fig. 11 Failure surface in limit state from FEM

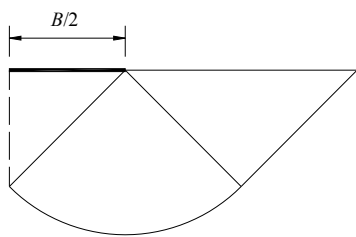


图 12 Prandtl 解的滑动面
Fig. 12 Prandtl Slip surfaces

对于复杂情况下的地基, 如复杂几何边界、复杂边界荷载、含有结构面等非均质地基, 传统诸多方法均不宜采用, 而极限分析有限元法却能方便的应用。下面两图为含有一软弱结构面地基极限承载力的极限分析有限元法的求解结果分析图。图 13 为极限状态时的基础附近局部的等效塑性应变等值云图, 图 14 为极限状态时的基础附近局部的位移矢量图。

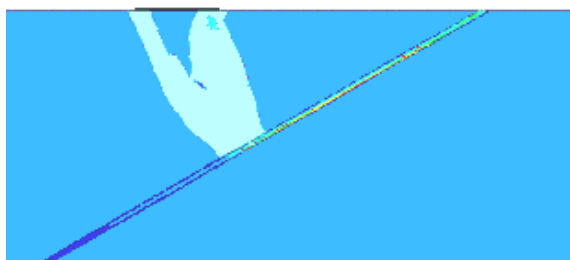


图 13 极限状态时的破坏滑动面
Fig.13 Failure sliding surface in limit state from FEM

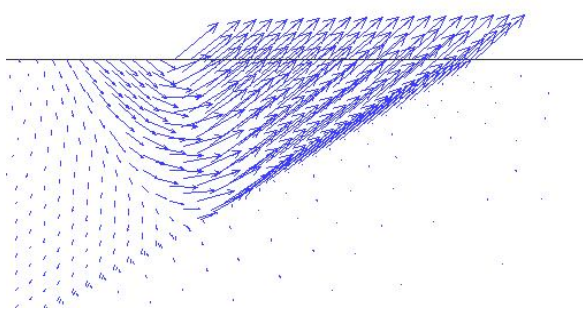


图 14 位移矢量图
Fig.14 Diagram of displacement vector

3.3 在地下工程与隧道中的应用

对地下隧道的稳定性评价一直缺乏一个合适的评判指标, 传统有限元法无法算出地下洞室工程的安全系数和围岩的破坏面, 仅凭应力、位移、拉应力区和塑性区大小很难确定地下洞室工程的安全度与破坏面。当前工程上尚没有隧道稳定安全系数的概念, 一般按照经验对隧道围岩的稳定性先进行分级。极限分析有限元法通过对岩土体强度参数的折

减, 使岩土体处于极限状态, 因而有可能使岩土体显示潜在的破裂面, 并求得安全系数, 该方法在边(滑)坡稳定分析中取得了成功, 但应用于地下洞室工程中算出的塑性区往往是一大片, 而不像边(滑)坡岩土体内存在明显的剪切带, 因而要找出围岩内的破裂面比较困难。本文研究表明, 隧道围岩发生塑性应变突变时的情况就是围岩发生破坏流动的情况, 因而, 只要找出围岩塑性应变发生突变时的塑性区各断面中塑性应变值最大的点, 并将其连成线, 就可得到围岩的潜在破坏面 (图 15), 同时可求得地下洞室的安全系数。本文所说的隧道稳定安全系数是指隧道整体安全系数, 即把非等强度的真实岩体视为均质等强的岩体, 据此求出安全系数。

应当注意这一安全系数是基于隧道受剪破坏而提出的, 可称为剪切破坏安全系数。大家知道, 隧道还可能受拉破坏, 主要是在松散破碎岩体中, 尤其是拱圈较平缓时拱顶可能出现拉裂破坏而垮塌, 因而, 隧道还存在一个拉裂破坏安全系数。但这方面的研究尚无前例, 有待深入。

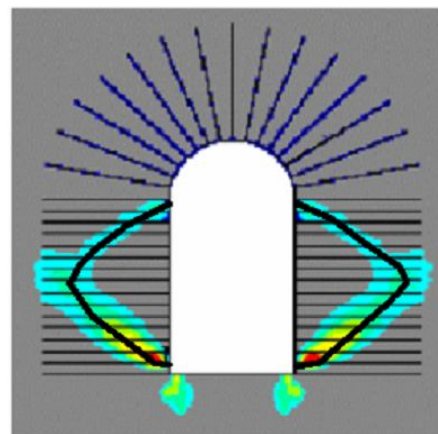


图 15 某高边墙地下洞库极限状态时的潜在破坏面
Fig.15 Potential failure surface of an underground opening in limit state from FEM

4 结 论

随着计算机技术的发展, 岩土工程极限分析有限元法正在成为极限分析方法新的分支。由于它使极限分析可以采用有限元数值分析方法运算, 并有现成大型程序可用, 从而扩大了极限分析法的应用范围。该方法可以对贯通和非贯通的节理岩质边坡进行稳定分析, 同时可以考虑地下水、施工过程的影响, 可以考虑各种支挡结构与岩土材料的共同作用, 因而具有很大的优越性和应用前景。

在极限分析有限元法中可通过增大荷载使岩土

体达到极限状态,比如计算地基极限承载力;也可通过降低岩土体的强度使土体达到极限状态,比如边坡稳定分析中的强度储备安全系数计算。研究表明,采用强度折减有限元法求得的安全系数以及滑动面位置和形状与采用传统的极限平衡条分法的计算结果十分接近。将极限分析有限元法应用于地基极限承载力的计算,算例表明采用极限分析有限元法计算结果与经典 Prandtl 解非常接近,这有力地说明极限分析有限元法的可行性。

目前,对地下隧道的稳定性评价一直缺乏一个合适的评判指标,作者在这方面作了些尝试,将极限分析有限元法应用于地下隧道的稳定性评价。极限状态时围岩发生塑性应变突变时的情况就是围岩发生流动破坏的情况,因而可依据塑性应变或者位移突变来确定潜在破坏面。通过有限元强度折减还可得到隧道的整体强度储备安全系数,这个安全系数可以作为隧道围岩分类的指标之一,关于这方面的工作还有待于进一步研究。

参 考 文 献

- [1] 栾茂田,武亚军,年廷凯. 强度折减有限元法中边坡失稳的塑性区判据及其应用[J]. 防灾减灾工程学报, 2003,23(3):1—8.
- [2] Dawson, E.M., Roth W.H. & Drescher A. Slope stability analysis by strength reduction [J]. *Geotechnique*, 1999, 49(6): 835—840.
- [3] D.V.Griffiths and P.A.lane. Slope stability analysis by finite elements[J]. *Geotechnique*, 1999, 49(3): 387—403.
- [4] 赵尚毅,郑颖人,时卫民等.用有限元强度折减法求边坡稳定安全系数[J], 岩土工程学报, 2002, 24(3):343—346.
- [5] Ugai K. A method of calculation of total factor of safety of slopes by elastic-plastic FEM[J]. *Soils and Foundations JGS*, 1989, 29 (2): 190—195.
- [6] 连镇营,韩国城,孔宪京.强度折减有限元法研究开挖边坡的稳定性[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(4): 406—411.
- [7] 郑宏,李春光,李焯芬,葛修润.求解安全系数的有限元法[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(5): 323—328.
- [8] 赵尚毅、郑颖人、邓卫东.用有限元强度折减法进行节理岩质边坡稳定性分析[J]. 岩石力学与工程学报.2003,22(2):254—260.
- [9] 周翠英,刘祚秋,董立国,尚伟,林鲁生.边坡变形破坏过程的大变形有限元分析[J].岩土力学, 2003,24(4): 644—652.
- [10] 郑颖人,赵尚毅.有限元强度折减法在土坡与岩坡中的应用[J]. 岩石力学与工程学报[J]. 2004, 23(19): 3 381—3 388.
- [11] 郑颖人,赵尚毅.用有限元强度折减法求滑(边)坡支挡结构的内力[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(20): 3552—3558.

向各位审稿专家致以节日的祝福

尊敬的各位审稿专家,您们好!

岁月交替,流年不返,美猴尚在门口,金鸡已早啼春。在新春佳节即将到来的时候,请接受我们由衷的祝福:祝您和您的家人身体健康,万事如意!

回顾《岩土力学》的成长,她所取得每一点进步,都离不开您们的大力支持和帮助,正是因为有了一支像您们这样具有无私奉献精神的专家队伍,在百忙之中抽空认真负责地为本刊审理稿件,严把论文质量关,才使得本刊的学术质量有了可靠的保障。

值此新春佳节来临之际,向各位审稿专家致以衷心的感谢!

再一次祝您

新年快乐!

《岩土力学》编辑部贺